CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS 1988

2ème épreuve de mathématiques
OPTION M
durée 4 heures - coefficient 6

N.B : les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés. Les résultats devront être soulignés ou encadrés. Il sera tenu compte de la présentation.

PARTIE I :

Soit a et b deux réels non nuls, et f et g les fonctions réelles d'une variable réelle définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{at}\cos(bt) \text{ et } g(t) = e^{at}\sin(bt) \quad (1)$$

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont une base est $\mathcal{B} = (f, g)$ (On ne demande pas de montrer que le système (f, g) est libre).

1°) a) Soit α un nombre réel. Montrer que l'application φ_α définie par : $\forall h \in E \quad h \xrightarrow{\varphi_\alpha} g_\alpha = \varphi_\alpha(h)$ (2)

où g_α est définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g_\alpha(t) = h(t+\alpha)$ (3)

est un automorphisme de E.

b) Déterminer la matrice M_α de φ_α par rapport à la base $\mathcal{B}$.

c) Montrer que l'ensemble : $\mathcal{M} = \{ M_\alpha , \alpha \in \mathbb{R} \}$ (4)

est un groupe multiplicatif.

2°) a) Montrer que l'application $\mathcal{D}$ qui à toute fonction h de E associe sa fonction dérivée h' est un automorphisme de E, et donner sa matrice D par rapport à la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer deux réels λ et μ tels que :

$$D^2 + \lambda D + \mu I = 0 \quad (5)$$

(I désigne la matrice identité, et 0 la matrice nulle).

Le couple (λ, μ) est-il unique ?

c) En déduire que toute fonction de E est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on écrira.

d) Exprimer D^{-1} en fonction de D et I. En déduire les expressions des intégrales indéfinies :

$$I = \int e^{at}\cos(bt)\,dt \text{ et } J = \int e^{at}\sin(bt)\,dt \quad (6)$$

3°) Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n = \int_0^\pi e^{at}\cos(nt)\,dt$ et $b_n = \int_0^\pi e^{at}\sin(nt)\,dt$ (7)

a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

b) Etudier la nature des séries de termes généraux $u_n(x)$ et $v_n(x)$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n x^n \text{ et } v_n(x) = b_n x^n \quad (8)$$

suivant les valeurs du réel x.

PARTIE II :

1°) Soit k la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$\forall u \in]-1, +1[, \quad k(u) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 - u\cos t} \quad (9)$$

Calculer $k(u)$.

2°) Soit l la fonction réelle d'une variable réelle définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad l(t) = \frac{1}{h^2 - 2h\cos t + 1}$ (10)

où h est un réel tel que $0 < |h| < 1$.

Soit $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; I_n = \int_0^\pi l(t)\cos(nt)\,dt \quad (11)$$

a) Montrer que I_n existe pour tout entier n et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |I_n| < I_0 .$$

b) Calculer I_0.

c) Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

3°) Donner le développement en série de Fourier de la fonction l. La fonction l est-elle égale sur tout $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ?

4°) Calculer l'intégrale : $J_n = \int_0^\pi (l(t))^2\,dt$ (13)

n étant un entier naturel quelconque.

T.S.V.P.

PARTIE III :

Soit F une fonction réelle d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad K_n = \int_a^b F(t)\cos(nt)dt \quad (14)$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$

Quels résultats retrouve-t-on ainsi ?

2°) a) On suppose seulement F continue sur $[a,b]$. Soit ε un réel strictement positif.

Montrer qu'il existe une fonction en escalier G_ε telle que : $\forall t \in [a,b], \quad |F(t) - G_\varepsilon(t)| < \varepsilon \quad (15)$

Indication : on pourra utiliser la continuité uniforme de F sur $[a,b]$.

b) Montrer que le résultat du III 1°) est encore vrai, en supposant seulement F continue.

3°) Soit F une fonction réelle d'une variable réelle, continue sur $[a,+\infty[$, telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} |F(t)|\,dt \quad (16)$ soit convergente.

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = \int_a^{+\infty} F(t)\cos(nt)\,dt \quad (17)$$

Montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et que $\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$

4°) Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \int_a^{+\infty} F(t)\,|\cos(nt)|\,dt \quad (18)$$

Montrer que cette suite est bien définie, et calculer $\lim_{n\to+\infty} M_n$.

ARTÉMIS

La Treizième revient... C'est encor la première ;
Et c'est toujours la seule, ou c'est le seul moment ;
Car es-tu reine, ô toi ! la première ou dernière ?
Es-tu roi, toi le seul ou le dernier amant ?...

Aimez qui vous aima du berceau dans la bière ;
Celle que j'aimai seul m'aime encor tendrement :
C'est la mort, ou la morte... O délice ! ô tourment !
La rose qu'elle tient, c'est la *Rose trémière.*

Sainte Napolitaine aux mains pleines de feux,
Rose au cœur violet, fleur de sainte Gudule :
As-tu trouvé ta croix dans le désert des cieux ?

Roses blanches, tombez ! vous insultez nos dieux,
Tombez, fantômes blancs, de votre ciel qui brûle :
— La sainte de l'abîme est plus sainte à mes yeux !

GÉRARD DE NERVAL

LES CHIMÈRES

(voir page 80)

ECOLE des INGENIEURS de la VILLE de PARIS
Math 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail